Tentamen Discrete Structuren

donderdag 27 maart 2003, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 9 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Wie een 5 of hoger heeft gehaald voor de toets van 29 januari 2003, hoeft de eerste 5 opgaven niet te maken: het toetsresultaat telt voor de helft mee in het tentamenresultaat. Heb je bij de toets 5 of hoger gehaald en maak je ook de opgaven 1 t/m 5, dan telt het beste resultaat.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Bewijs mbv. een lineair geannoteerd bewijs dat de formule

   $$((p \to q) \to q) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q)$$

   een tautologie is.

2. Bewijs met volledige inductie over N:

   $$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

3. a. Definieer: propositie p is een invariant van de loop `while g do S`.
   b. m, n zijn gehele getallen. Laat zien dat $n \geq 0$ een invariant is van

```
while  m > 0  do
  n := n * (m - 1) * (n + m)
```

4. a. Zij $s(n)$ ($n \in N$) een rij getallen. Wat is de definitie van $s(n) = O(n)$? En van $s(n) = \Theta(n)$?
   b. Geldt $2^{2n} = O(2^n)$? En $2^{n+1} = \Theta(2^n)$?

5. Geef een expliciete formule voor s_n, gegeven door

   $$s_0 = -1$$
   $$s_1 = 4$$
   $$s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 2$$

Z.O.Z.

6. Deze opgave gaat over eindige ongerichte grafen G.
   De graad $deg(v)$ van een knoop $v \in V(G)$ is gedefinieerd als het aantal kanten dat met v verbonden is, waarbij loops dubbel tellen. Formuleer en bewijs een formule over het aantal kanten van de graaf in termen van deg.

7. Teken een logisch netwerk voor de functie XOR mbv.
   a. twee AND-poorten en een OR-poort;
   b. twee OR-poorten en een AND-poort.
   Daarnaast mogen NOT-poorten gebruikt worden, maar: hoe minder, hoe beter. In beide gevallen kan het met 2 NOT-poorten.

8. $(X, \leq)$ is een partieel geordende verzameling, met $x, y, z \in X$. Geef definities (in logische notatie) van de volgende begrippen.
   a. x is maximaal element in X.
   b. x is het grootste element van X.
   c. x is bovengrens van y en z.
   d. x is kleinste bovengrens van y en z.

9. Bewijs mbv. een geannoteerd lineair bewijs

$$\neg\forall x(p(x) \to q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x q(x) \vee \neg\exists y p(y))$$

10. a. Wanneer zijn twee verzamelingen (eindig of oneindig) even groot?
    b. Geef een voorbeeld van twee even grote verzamelingen X en Y met $X \neq Y$ en $X \subseteq Y$.

1.	$\neg\neg p \Longleftrightarrow p$	double negation
2a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$	commutative laws
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$	
c.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	
3a.	$[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	associative laws
b.	$[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	
4a.	$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	distributive laws
b.	$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	
5a.	$(p \vee p) \Longleftrightarrow p$	idempotent laws
b.	$(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$	
6a.	$(p \vee \mathbf{0}) \Longleftrightarrow p$	identity laws[1]
b.	$(p \vee \mathbf{1}) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
c.	$(p \wedge \mathbf{0}) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
d.	$(p \wedge \mathbf{1}) \Longleftrightarrow p$	
7a.	$(p \vee \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
b.	$(p \wedge \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
8a.	$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	DeMorgan laws
b.	$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
c.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$	
d.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	
9.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	contrapositive
10a.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$	implication
b.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
11a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	
12a.	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
13.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	equivalence
14.	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	exportation law
15.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{0}]$	reductio ad absurdum

16.	$p \Longrightarrow (p \vee q)$	addition
17.	$(p \wedge q) \Longrightarrow p$	simplification
18.	$(p \rightarrow \mathbf{0}) \Longrightarrow \neg p$	absurdity
19.	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Longrightarrow q$	modus ponens
20.	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow \neg p$	modus tollens
21.	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Longrightarrow q$	disjunctive syllogism
22.	$p \Longrightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$	
23.	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Longrightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitivity of $\leftrightarrow$
24.	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Longrightarrow (p \rightarrow r)$	transitivity of $\rightarrow$ *or* hypothetical syllogism
25a.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$	
b.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$	
c.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	
26a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	constructive dilemmas
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$	
27a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)]$	destructive dilemmas
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(\neg q \wedge \neg s) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)]$	

28a.	$\neg\mathbf{1} \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	0-1-wetten
b.	$\neg\mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
29a.	$(p \wedge (p \vee q)) \Longleftrightarrow p$	absorptie
b.	$(p \vee (p \wedge q)) \Longleftrightarrow p$	

Equivalenties:

30a.	$p \Longleftrightarrow \forall x\, p$ (x niet vrij in p)	loze kwantificatie
ba.	$p \Longleftrightarrow \exists x\, p$ (x niet vrij in p)	
31a.	$\forall x\, p(x) \Longleftrightarrow \forall y\, p(y)$	herbenoemen van gebonden variabele
b.	$\exists x\, p(x) \Longleftrightarrow \exists y\, p(y)$	
32a.	$\forall x\, \forall y\, p(x,y) \Longleftrightarrow \forall y\, \forall x\, p(x,y)$	kwantorwisseling
b.	$\exists x\, \exists y\, p(x,y) \Longleftrightarrow \exists y\, \exists x\, p(x,y)$	
33a.	$\forall x(p(x) \wedge q(x)) \Longleftrightarrow \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$	$\forall(\wedge) \Longleftrightarrow \forall \wedge \forall$ ($\forall$ distribueert over $\wedge$)
b.	$\exists x(p(x) \vee q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)$	$\exists(\vee) \Longleftrightarrow \exists \vee \exists$ ($\exists$ distribueert over $\vee$)
34a.	$\forall x(p \vee q(x)) \Longleftrightarrow p \vee \forall x\, q(x)$ (x niet vrij in p)	
b.	$\exists x(p \wedge q(x)) \Longleftrightarrow p \wedge \exists x\, q(x)$ (x niet vrij in p)	
35a.	$\neg\forall x\, p(x) \Longleftrightarrow \exists x\, \neg p(x)$	$\neg\forall \Longleftrightarrow \exists\neg$ (De Morgan)
b.	$\neg\exists x\, p(x) \Longleftrightarrow \forall x\, \neg p(x)$	$\neg\exists \Longleftrightarrow \forall\neg$ (De Morgan)

Implicaties:

36.	$\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$	$\forall \Rightarrow \exists$
37.	$\exists x\, \forall y\, p(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x,y)$	$\exists\forall \Rightarrow \forall\exists$
38a.	$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x))$	$\forall \vee \forall \Rightarrow \forall(\vee)$
b.	$\exists x(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$	$\exists(\wedge) \Rightarrow \exists \wedge \exists$

6 Als we van elke knoop de graad nemen en deze optellen wordt elke kant tweemaal geteld. ✓ De formule is dus: (waar $E(G)$ de kantenverzameling is)

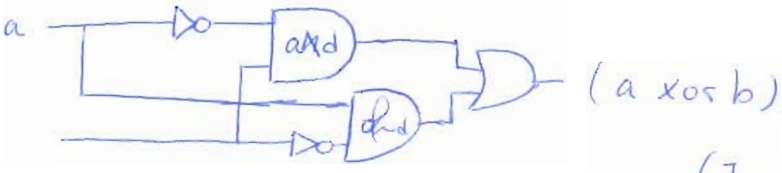
$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{|V(G)|} deg(v_i)$$ met v_i het i-de element uit $V(G)$

Bewijs:
Voor de lege graaf bestaande uit 0 knopen en 0 kanten klopt de formule, want $0 = |E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{0} deg(v_i) = 0$
Met inductie is de rest te bewijzen: neem aan dat de formule geldt voor graaf G. Maak een graaf G' op één van de volgende manieren:

1. Voeg een knoop toe.
   Deze is nergens mee verbonden en heeft dus deg(0). Dit heeft geen invloed op de waarde van de sommatie. Ook het linkerlid blijft gelijk, want er komen geen kanten bij. De formule geldt dus ook voor G'.
2. Voeg een kant toe.
   $|E(G)|$ neemt dan met 1 toe. Als de kant een loop is neemt $deg(v_i)$ met 2 toe voor precies één i. anders nemen $deg(v_i)$ en $deg(v_j)$ met 1 toe voor precies één i en j, die niet gelijk zijn. In beide gevallen wordt de sommatie 2 groter, dus het rechterlid, evenals het linker, neemt met 1 toe dus de formule blijft gelden voor G'.

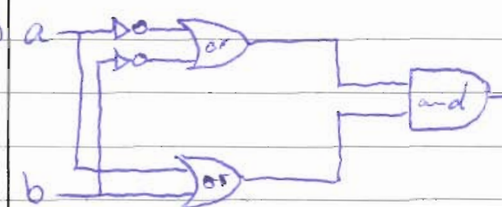
Nog te bewijzen is dat elke eindige graaf zo gemaakt kan worden: dit kan; zet bijvoorbeeld één voor één alle knopen neer en voeg dan één voor één alle kanten toe. ☒

9

7a) 

$(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$

8

b 

8

$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

8a $\forall y \in X\ \cancel{(y \leq x)}$ $\neg(y > x)$

(4)

b $\forall y \in X\ ((y \leq x) \wedge \cancel{\neg(x \leq y)})$

c $(y \leq x) \wedge (z \leq x)$

~~d $(y \leq x) \wedge (z \leq x) \wedge (x \leq y \vee x \leq z)$~~

9 $\neg \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x))$

$\Leftrightarrow$ {De Morgan: 35a}

(8)

$\exists x\ (\neg(p(x) \rightarrow q(x)))$

$\Leftrightarrow$ $\{\neg(p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge q) : 11b\}$

$\exists x\ (p(x) \wedge \neg q(x))$

$\Rightarrow$ $\{\exists(\wedge) \Rightarrow \exists \wedge \exists : 38b\}$

$\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ \neg q(x)$

$\Leftrightarrow$ {De Morgan: 8d}

$\neg(\neg\exists x\ p(x) \vee \neg\exists x\ \neg q(x))$

$\Leftrightarrow$ {commutativiteit: 2a}

$\neg(\neg\exists x\ \neg q(x) \vee \neg\exists x\ p(x))$

$\Leftrightarrow$ {De Morgan: 35b}

$\neg(\forall x\ (\neg\neg q(x)) \vee \neg\exists x\ p(x))$

$\Leftrightarrow$ {dubbele negatie: 1}

$\neg(\forall x\ q(x) \vee \neg\exists x\ p(x))$

$\Leftrightarrow$ {herbenoemen gebonden variabele: 31b}

$\neg(\forall x\ q(x) \vee \neg\exists y\ p(y))$ $\boxtimes$

10a Twee verzamelingen A en B zijn even groot als er een
4 bijectie van A naar B (en dus ook andersom) bestaat.

b $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$ $X \subseteq Y$ is duidelijk, want ieder natuurlijk

9 getal zit ook in $\mathbb{Z}$. Ze zijn even groot

omdat $\mathbb{Z}$ aftelbaar is, en dat betekent dat er

een bijectie naar $\mathbb{N}$ bestaat; namelijk:

$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \geq 0 \\ 2|x|-1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$ $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{als } y \text{ even} \\ -\frac{1}{2}(y+1) & \text{als } y \text{ oneven} \end{cases}$